

Algebra

msliziak.com/vyuka
hodnotenie: 10 oviek
100 bodov

BINÁRNA OPERÁCIA

Def: Nech A je množina: zobra. $*$: $A \times A \rightarrow A$ voláme binárna operácia (BO) na množine A .

$$\# X \times Y = \{ (x, y) : x \in X \wedge y \in Y \}$$

↳ usporiadanie dvojice

ozn.: $*$ $((a, b)) = a * b$
 $a, b \in A$

pr. $+$ BO na $\mathbb{R}$

$$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow a + b \in \mathbb{R}$$

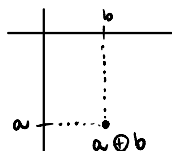
$+$ BO na $\langle -1, 1 \rangle \rightarrow$ nie, lebo napr. $1 + 1 = 2 \rightarrow 2 \notin \langle -1, 1 \rangle$
 $A \times A \rightarrow A$ (prvek výsledný musí byť z Ažka)

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{ na } \mathbb{R} \\ + \cdot \text{ na } \mathbb{Q} \end{array} \right\} \text{ na BO } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} : \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

pr. $\oplus \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

$$a \oplus b = (a + b) \bmod 4$$

$$\odot a \odot b = (a \cdot b) \bmod 4$$



	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

← rovnaký

pr. $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Δ	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	2
2	0	2	1

pr. $\mathbb{Q}_2$
 $a \triangle b \stackrel{\text{def}}{=} a$
 $\uparrow$
BO na $\mathbb{Q}$

$$e = e \triangle 0 = 0$$

$$e = e \triangle 1 = 1$$

$$e = 0 \neq 1 \quad \times$$

$$\text{ENP} = 0, 1$$

$$\text{PNP} = \times$$

Def: Nech $*$ je bin. op. na A

Prvek $e \in A$ voláme:

• **ĽAVÝ NEUTRÁLNY PRVOK**
operácie $*$ ak:
($\forall a \in A$) $e * a = a$

• **PRÁVY NEUTRÁLNY PRVOK**
operácie $*$ ak:
($\forall a \in A$) $a * e = a$

• **NEUTRÁLNY PRVOK (NP)**,
keď je prvok ENP aj PNP
($\forall a \in A$) $e * a = a * e = a$

VLASTNOSTI BINÁRNYCH OPERÁCIÍ

	ENP	PNP	NP	kom.	asoc	IF
$(\mathbb{R}, +)$	0	0	0	✓	✓	$-a$
$(\mathbb{R}, \cdot)$	1	1	1	✓	✓	$\frac{1}{a} (a \neq 0)$
$(\mathbb{Z}_4, \oplus)$	0	0	0	✓	✓	✓
$(\mathbb{Z}_3, \Delta)$	0, 1	x	x	x	x	—
$(\mathbb{Q}, \triangle)$	x	✓	x	x	✓	—

$$0 \Delta (0 \Delta 0) = 0 \Delta 0 = 0$$

$$(0 \Delta 0) \Delta 0 = 0 \Delta 0 = 0$$

$$2 \Delta (0 \Delta 1) = 2 \Delta 1 = 2$$

$$(2 \Delta 0) \Delta 1 = 0 \Delta 1 = 1$$

TVR: Nech $*$ je bin.op. na A .
 Nech e_1 je ľavý a e_2 je pravý NP.
 Potom $e_1 = e_2$. neutrálny prvok

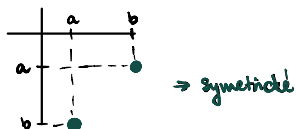
Špeciálne, ak $*$ má NP, tak je jeden určujú.

D: $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$
 $e_1 = e_2$

□

Def: Nech $*$ je bin.op. na A .

Hovíme, že $*$ je KOMUTATÍVNA, ak $a * b = b * a; (\forall a, b \in A)$.



$\Rightarrow$ symetrické

Def: Nech $*$ je bin.op. na A .

Hovíme, že $*$ je ASOCIATÍVNA, ak $a * (b * c) = (a * b) * c; (\forall a, b, c \in A)$.

Def: $*$ BO na A , nech e je NP.

Nech $a \in A$.

Potom $b \in A$ je INVERZNÝ PRVOK (IP)
 k a ($a * b = b * a = e$)

ozn.: a^{-1} (inakže: jednoznačne určujú)

keď niečo višim
 v jednej množine,
 patilo by sa tam
 aj zostať - kľak

TVR: Nech $*$ je asoc. bin.op. v A ; e je NP.

Ak b_1, b_2 sú IP k a , tak $b_1 = b_2$.

(Ak IP existuje, tak je jednoznačne určený)

D: $b_1 * (a * b_2) = b_1 * e = b_1$
 $(b_1 * a) * b_2 = e * b_2 = b_2$

□

GRUPY

Def: Ak G je množina a $*$ je BO na G , tak $(G, *)$ je grupa, ak:

- $*$ je ASOCIATÍVNA ($\forall a, b, c \in G$) $a * (b * c) = (a * b) * c$
- $*$ má NP ($\exists e \in G$) ($\forall a \in G$) $a * e = e * a = a$
- pre každý prvok $a \in G$ existuje IP $b \in G$
 $(\forall a \in G) (\exists b \in G) a * b = b * a = e$

• ak navyše $*$ je komutatívna BO na G , tak $(G, *)$ je komutatívna grupa (KG, abelská grupa)

22

$(\mathbb{R}, +)$ je KG

$(\mathbb{Z}_n, \oplus) \vee \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n = (\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n) \bmod n$ $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$(\mathbb{R}, \cdot)$ nie je grupa

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ - BO $\# \mathbb{N} \setminus 0 = \mathbb{N} - 0$

- asoc., komut.

$(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ - nie je grupa

$a, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$

$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

$\hookrightarrow$ obojstranná implikácia: $p = q \Rightarrow p \Rightarrow q$

Veta (základy o brátenci):

Nech $(G, *)$ je grupa. Nech $a, b, c \in G$.

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

D:

$$a * b = a * c \text{ / zánul } a^{-1}$$

$$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ asociativnost}$$

$$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$$

$$e * b = e * c$$

$$b = c$$

□

POLE

Def: Nech $(F, +, \cdot)$ je množina, $+$ a $\cdot$ sú na F .

Potom $(F, +, \cdot)$ voláme pole, ak:

$$(F, +) \text{ je } (K, +) \text{ o.z.m.: } 0 \text{ asociatív NP } (F, +)$$

$$(F, \cdot) \text{ je } (K, \cdot) \text{ o.z.m.: } 1 \text{ asociatív IP } a \cdot b = b \cdot a \quad \left. \begin{array}{l} \text{komutativna grupa} \\ \text{asociativna IP} \end{array} \right\} \text{ asociatív NP}$$

$$(F \setminus \{0\}, \cdot) \text{ je } (K \setminus \{0\}, \cdot) \text{ o.z.m.: } 1 \text{ asociatív NP}$$

$$a^{-1} \text{ asociatív IP}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\forall a \in F) \quad a \cdot (b + c) = ab + ac \\ (\forall a \in F) \quad (b + c) \cdot a = ba + ca \end{array} \right\} \text{ distributivnost}$$

Príklady: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ pole

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ pole

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ pole

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie je pole

$$a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b + c)$$

$$(a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Def. pole ešte má:

$$r_1: F \times F \rightarrow F$$

$$(\forall a, b, c \in F) \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + c$$

$$(\forall a, b \in F) \quad a + b = b + a$$

$$(\exists 0 \in F) \quad (\forall a \in F) \quad 0 + a = a$$

$$(\forall a \in F) \quad (\exists e \in F) \quad a + b = 0$$

$$(\forall a, b, c \in F) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{ak } a \text{ a } b \text{ sú komutativne}$$

$$(\exists 1 \in F \setminus \{0\}) \quad (\forall a \in F) \quad 1 \cdot a = a$$

$$(\forall a \in F \setminus \{0\}) \quad (\exists b \in F) \quad a \cdot b = 1$$

$$(\forall a, b, c \in F) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Veta:

Nech $(G, *)$ je grupa, $a, b \in G$.

$$\text{Potom: } (a^{-1})^{-1} = a.$$

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

$$\text{podmienka } (g * f)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$$

to vo všeobecnosti neplatí (potom komutatívna grupa)

D:

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad (\text{sama})$$

$$(a * b) * (a * b)^{-1} = e$$

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$$

$$a * b * b^{-1} * a^{-1} = e$$

$$(a * e) * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$(\mathbb{Z}_n, \odot; \odot)$$

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\} \quad n \in \mathbb{N}; n \geq 2$$

$$a \odot b = (a \cdot b) \bmod n$$

$$a \odot b = (a \cdot b) \bmod n$$

Veta Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$(\mathbb{Z}_n, \odot, \odot)$ je pole $\Leftrightarrow n$ je prvočíslo.

potia: $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$

nie: $(\mathbb{Z}_6, \odot, \odot)$

D: $\Rightarrow$ DÚ

$(\mathbb{Z}_n, \odot, \odot)$ je pole $\Leftrightarrow n$ je prvočíslo

$$n | a \cdot b \Rightarrow n | a \vee n | b$$

$\odot$ je bin.op. na $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\})^\times$

$$a \neq 0; a \odot b = a \odot c \Rightarrow b = c$$

$$b \neq c \Rightarrow a \odot b \neq a \odot c$$

? IP?

Nech $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Má a IP?

$$a \odot 1 = \square$$

$$a \odot 2 = \square$$

$$a \odot (n-1) = \square$$

$$a \odot (n) = \square$$

IP - vyšetrujeme pre $n=5$

n vektorov v množ. prily usporiadanej po

radosti

radosti

$(n$ je prvočíslo)

$$NP: 0 \odot a = (0 \cdot a) \bmod n = a \bmod n = a$$

$$IP: 1 \odot 0 = 0$$

$$k \cdot a \neq 0 \text{ pre } n-a \quad a \odot (n-a) = 0$$

$$Distrib: a \odot (b \odot c) = a \odot b \odot a \odot c =$$

$$= (a \cdot b) \bmod n + (a \cdot c) \bmod n \bmod n =$$

$$= a \cdot (b+c) \bmod n = (a \cdot b + a \cdot c) \bmod n$$

$$n | a \cdot b \Rightarrow n | a \vee n | b$$

$(n$ je prvočíslo)

$\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ je KG

0 je DO na $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\})^\times$

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow a \odot b \neq 0$$

$$a \odot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} (a \cdot b) \bmod n = 0 \Rightarrow n | a \cdot b \\ \Rightarrow n | a \vee n | b \end{array} \right.$$

$$a, b \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow a \cdot b = 0$$

NP: 1

IP: Všetchny si $a, b, c \in \mathbb{Z}_n; a \neq 0$

$$a \odot b = a \odot c \Rightarrow b = c$$

$$\left[\begin{array}{l} (a \cdot b) \bmod n = (a \cdot c) \bmod n \\ n | a \cdot b - a \cdot c \\ n | a(b-c) \Rightarrow \frac{n | a}{n | b-c} \end{array} \right.$$

$$n | b-c \in \{-(n-1), \dots, -1, 1, \dots, n-1\}$$

4.10.2017

$$(\mathbb{Z}_n, \odot, \odot)$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, 10\}$$

$$4 \odot 8 = 1$$

$$4 \odot 8 = 10 \cdot -1 \Rightarrow -4 \odot 8 = 1$$

$$4 \odot (8) = 1$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

$$4 \cdot (-1) = -4$$

VEKTOROVÉ PRIESTORY

JE OSEM Vektorov, ov 8!

Def: Nech V je množina, nech F je pole

$$+ V \times V \rightarrow V \quad (\text{DO na } V)$$

$$\cdot F \times V \rightarrow V \quad c \in F, \vec{a} \in V \mapsto c \cdot \vec{a} = V$$

$$(V, +, \cdot)$$
 je vektorový? (VP) nad polom F ak

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

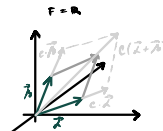
$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG

$$\cdot (V, +)$$
 je KG



$$F = \mathbb{C}$$

$$F = \mathbb{R}$$

V - vektor v rovine

2-tyl 20 strednej

$$\dim(\mathbb{R}^2) \quad \mathbb{R}^2 - \text{v rovine } (x, y)$$

$$\dim(\mathbb{R}^3) \quad \mathbb{R}^3 - \text{v priestore } (x, y, z)$$

VŠEOBECNEJŠIE:

$\mathbb{P}$ Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}} - \text{množina } V$$

$$V = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R} - \text{usporiadanej}$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) - n\text{-ty reálnych}$$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) - \text{čís}$$

$$\vec{z} = (z_1, \dots, z_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) - \text{čís}$$

$$NP \text{ vo } (v, +) \quad (0, 0, \dots, 0) + (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad -\vec{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

$$i\text{-tá súradnica: } c(x_1, y_1) = cx_1 + cy_1$$

Právnik: ? $v \in F^n$ ale vp nad F .

Príklad: v_i v sloupkách symetrické

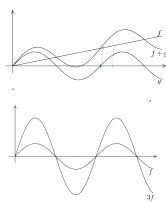
$$\vec{0} = \vec{0} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i$$

$$(PR) \quad v = R^n \rightarrow \mathbb{R}^n, R \rightarrow \mathbb{R}^n \quad F = \mathbb{R} \quad (\text{prav. dim}(v) = \infty)$$

$$f, g \in V \rightarrow \text{Fig} \quad f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g)(x)$$



$$\vec{0} \text{ je } \vec{0}?$$

$$NP(v, +) \quad \vec{0}(x) = 0$$

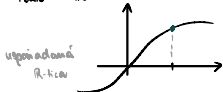
$$(c \cdot d) \cdot f \stackrel{\text{funkcia}}{=} c \cdot (d \cdot f)$$

$$((c \cdot d) \cdot f)(x) = (c \cdot d) \cdot f(x) \quad \swarrow \quad \searrow \quad \begin{matrix} y \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$(c \cdot (d \cdot f))(x) = c \cdot (d \cdot f)(x) = c \cdot (d \cdot f(x))$$

$$\text{Príklad: } f: M \rightarrow F^3 = F^n \quad - \quad vp \text{ nad } F$$

$$\text{Príklad: } \mathbb{R}^n$$



VERA: Veta 4.1.6. Nech V je K -vektorový priestor nad polom F , $c \in F$, $v \in V$.

$$(a) \quad c \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$(b) \quad c \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad (0 \cdot \vec{v} = \vec{0})$$

$$(c) \quad c \cdot \vec{0} = \vec{0} \text{ práve vtedy keď } c = 0 \text{ alebo } \vec{0} = \vec{0}$$

$$(d) \quad (-c) \cdot \vec{0} = -c \cdot \vec{0}$$

$$D: a) \quad 0 + 0 = 0$$

$$\vec{0} \cdot \vec{x} = (0 \cdot 0) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{0} \cdot 0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x}$$

$$\Downarrow \text{ak (akáto = kváto)}$$

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}$$

□

$$e) \quad c \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow c = 0 \vee \vec{x} = \vec{0}$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$c = 0$$

$$\vee$$

$$c + 0 \rightarrow \text{exist. } c'$$

$$c' \cdot (c \cdot \vec{x}) = c' \cdot \vec{0}$$

$$= \vec{0}$$

$$c' \cdot (c \cdot \vec{x}) = (c' \cdot c) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$d) \quad (-c) \cdot \vec{x} = -(c \cdot \vec{x})$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ -c \cdot \vec{x} & & -(c \cdot \vec{x}) \end{matrix} \text{ je } \vec{0} \text{ v } (F, +) \text{ k } c \cdot \vec{x}$$

$$(b) \quad (-c) \cdot \vec{x} \text{ je } \vec{0} \text{ k } c \cdot \vec{x} \quad (\text{v grupe } (V, +))$$

$$(i) \quad (-c) \cdot \vec{x} + c \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (-c + c) \cdot \vec{x}$$

$$\Rightarrow 0 \cdot \vec{x}$$

$$\Rightarrow \vec{0}$$

□

Def.: Nech $(V, +, \cdot)$ je VP nad F . Nech $S \subseteq V$.

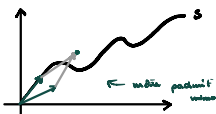
S je vektorový podpriestor (VPP) priestoru V , ak $S \neq \emptyset$ a

(i) $(\forall \vec{x}, \vec{z} \in S) \vec{x} + \vec{z} \in S$

(ii) $(\forall c \in F) (\forall \vec{x} \in S) c \cdot \vec{x} \in S$

PODPRIESTORY:

$S \subseteq V$



Pozn.: S je VPP vo $V \Leftrightarrow \vec{0} \in V$

$S \neq \emptyset \Rightarrow \exists \vec{x} \in S$
Potom aj $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$

(Pr.) V lineárnym VP $\mathbb{R}^3$, V má VPP

$S = \mathbb{R}\vec{0}$
 $S = V$

$x+y+z=0 \rightarrow$ body v rovine

$ax+by+cz+d=0 \rightarrow$ rovina

$\vec{R} = (a, b, c) \rightarrow$ normalový vektor

len také body

$x+y+z=1$



$\mathbb{R}^3$

• priamka $\mathbb{R}\vec{0}$

• rovina $\mathbb{R}\vec{0}$

Pozn. $(V, +, \cdot)$ je VPP na $V \Rightarrow (S, +, \cdot)$ je VP.

$\uparrow$
 $+ : V \times V \rightarrow V$
 $\cdot : F \times V \rightarrow V$

také isté ako $+ \cdot$
pri $(V, +, \cdot)$, ale
zamerané na S

$+ : S \times S \rightarrow S$
 $\cdot : F \times S \rightarrow S$

(Pr.) $V = \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}\vec{0}$, $V = \mathbb{R}^3$

priamka $\mathbb{R}\vec{0}$

$V = \mathbb{R}^3$

$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0 \}$

$\vec{0} = (0, 0, 0) \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$

$\vec{x} = (x, y, z) \in S \Rightarrow x+y+z=0$

$\vec{y} = (y, z, x) \in S \Rightarrow y+z+x=0$

$\downarrow$

$\vec{x} + \vec{y} = (x+y, y+z, z+x) \in S$

$(x+y) + (y+z) + (z+x) = 0$

$\vec{x} = (x, y, z) \in S$

$c \cdot \vec{x} = (cx, cy, cz) \in S$

$cx+cy+cz=0$

$\square$

podpriestor je znovom
vektorový priestor, ak ho
patrične zhmotní

$(S, +, \cdot)$ je VP na V $\Rightarrow \vec{0} \in V$

$(\forall c \in F) (\forall \vec{x}, \vec{y} \in S) c \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = c \cdot \vec{x} + c \cdot \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \in S \Rightarrow -\vec{x} \in S$

$c \cdot (z \cdot \vec{x}) = (cz) \cdot \vec{x}$

Veta (kritérium VPP):

Nech $(V, +, \cdot)$ je VP na $F, S \subseteq V, S \neq \emptyset$.

S je VPP $\Leftrightarrow (\forall c, d \in F) (\forall \vec{x}, \vec{y} \in S) c\vec{x} + d\vec{y} \in S$

(dú. $\Leftrightarrow (\forall c \in F) (\forall \vec{x} \in S) c\vec{x} \in S$)

D. $\Rightarrow c, d \in F, \vec{x}, \vec{y} \in S$

(ii) $c\vec{x} + d\vec{y} \in S$

$\Rightarrow$ (i) $c\vec{x} + d\vec{y} \in S$

$\Leftrightarrow c, d = 1, \vec{x}, \vec{y} \in S \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S$

$d = 0, \vec{y} = \vec{0}$

$c \in F, \vec{x} \in S$

$\Rightarrow c \cdot \vec{x} + c \cdot \vec{0} = c \cdot \vec{x} \in S$

$\square$

Veta: Nech $(V, +, \cdot)$ je VP nad F .

Ak sú S_1, S_2 na V , tak aj

$S_1 \cap S_2$ je VPP.

D: $\vec{0} \in S_1 \Rightarrow \vec{0} \in S_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

$\vec{x}, \vec{y} \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow c \cdot \vec{x} + d \cdot \vec{y} \in S_1 \cap S_2$

$\downarrow$

$\vec{x}, \vec{y} \in S_1 \Rightarrow c \cdot \vec{x} + d \cdot \vec{y} \in S_1$

$\vec{x}, \vec{y} \in S_2 \Rightarrow c \cdot \vec{x} + d \cdot \vec{y} \in S_2$

$\vec{x}, \vec{y} \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow c \cdot \vec{x} + d \cdot \vec{y} \in S_1 \cap S_2$

$\square$

overili sme (Pr.)

$S_1, \dots, S_n$ sú VPP $\Rightarrow S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$ sú VPP

$\Leftarrow$ konštrukcia veta

? indukčnou vetou?

Pre $i \in I$ máme množinu $S_i, I \neq \emptyset$

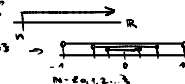
$\bigcap_{i \in I} S_i = \{ x_i, (x_i \in I) \} = \{ x_i \}$

$\dots n(1, \infty) \cap (2, \infty) \cap (3, \infty) \cap \dots$

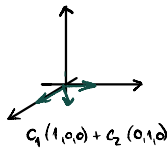
$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n, \infty) = \emptyset$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) = \emptyset$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) = \emptyset$



18. 10. 2021



1) $S_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$
 $= \{c_1(c_1, c_2, 0), c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

$S_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)] = S_1$
 $\hookrightarrow$ vektory jsou u nás

$S_2 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \mathbb{R}^3$
 $= \{c_1(c_1, c_2, c_3), c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$

Lemma: Necht V je VP, $S \subseteq V$ je VPP.
 At $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in S$ a $c_1, \dots, c_n \in F$, tak
 $c_1\vec{z}_1 + c_2\vec{z}_2 + \dots + c_n\vec{z}_n \in S$ # množina uzavřená na lineární kombinaci

D: MT. na n:

n^o $n=1$ $\vec{z}_1 \in S, c_1 \in F \Rightarrow c_1\vec{z}_1 \in S$ ✓
 z^o $n \rightarrow n+1$ $\underbrace{c_1\vec{z}_1 + \dots + c_n\vec{z}_n}_{\substack{\text{VP } \in S \\ \in S}} + c_{n+1}\vec{z}_{n+1} \in S$

logf podmnožina je to isté ako
 logf uzavřený na "lineární" operace

Věta: Necht V je VP, $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in V$.

Necht $S \subseteq V$ je VPP na V .
 $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in S \Rightarrow [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n] \subseteq S$

Pozn: $[\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n] \in S$ je nejmenší podmnožina (VPP),
 kt obsahuje $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$.

D: $[\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n] \subseteq S$
 $\vec{z}_i \in [1 \dots n] \Rightarrow \vec{z}_i \in S$
 $\vec{z} = c_1\vec{z}_1 + \dots + c_n\vec{z}_n \Rightarrow \vec{z} \in S$
 $\hookrightarrow$ vidano
 $\&$ uzavřený

Věta: Necht $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in V, (VP)$.

$[\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n] = [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n, \vec{\beta}] \Leftrightarrow \vec{\beta}$ je lineární kombinací (LK) vektorů $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$.

D: $\Leftrightarrow$ množina lineárních kombinací
 $\vec{\beta} \in [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n, \vec{\beta}] = [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n] \Rightarrow \text{---}$

$\Leftarrow$ $[\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n] = [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n, \vec{\beta}]$ $\Leftrightarrow \vec{\beta} \in S$
 $\Leftrightarrow$ ✓ vidano hned $\Leftrightarrow \vec{\beta} \in S$

$\Rightarrow$ $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n]$
 $[\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n] \subseteq [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n, \vec{\beta}]$

$\Rightarrow$ $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n]$
 $\vec{\beta} \in [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n] \Rightarrow [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n, \vec{\beta}] \subseteq [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n]$
 $\#$ kde $\vec{\beta}$ je LK

Věta: S je VPP.

$\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in S \Rightarrow [\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n] \subseteq S$

LINEARNA (NE)ZAVISLOST

Def: Neka v je VP , $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$.

Vektor $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ su linearno zavisli (LZ),

ak postoji $c_1, \dots, c_n \in F, (c_1, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Ali $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ nie su LZ, tak konvencijom su linearno nezavisli.

POZN.: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ su LZ $\Leftrightarrow$

$$(\forall c_1, \dots, c_n \in F) \quad c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

D: nov. D.J.

(1) $\left. \begin{matrix} \vec{a}_1 = (1, 0) \\ \vec{a}_2 = (0, 1) \end{matrix} \right\} \text{ su LZ}$

$$\begin{aligned} c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 &= \vec{0} \\ c_1 (1, 0) + c_2 (0, 1) &= (0, 0) \\ (c_1, c_2) &= (0, 0) \\ c_1 = c_2 &= 0 \end{aligned}$$

(2) $\left. \begin{matrix} \vec{a}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{a}_2 = (0, 1, 0) \\ \vec{a}_3 = (0, 0, 1) \end{matrix} \right\} \text{ su LZ}$

(3) $\left. \begin{matrix} \vec{a}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{a}_2 = (0, 1, 0) \\ \vec{a}_3 = (1, 1, 0) \end{matrix} \right\} \text{ su LZ}$

$$\begin{aligned} c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + c_3 \vec{a}_3 &= \vec{0} \\ c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1 \end{aligned}$$

(4) D.J. $n=1$ $\vec{a}_1$ je LZ $\Leftrightarrow \vec{a}_1 = \vec{0}$
 $n=2$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ su LZ $\Leftrightarrow$ 1 je nula ili nije nula

(5) $\vec{a}_1, \vec{0}, \vec{a}_2$ su LZ
 $0 \vec{a}_1 + 1 \vec{0} + 0 \vec{a}_2 = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{0}$ je LZ

Veta: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ (V je VF)
 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ su LZ $\Leftrightarrow$ Neki su nula ili nisu su nezavisni.

D: $\Leftarrow$ Neka $\vec{a}_1$ je LZ nezavisni.
 $\vec{a}_1 = c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n + \dots + c_n \vec{a}_n$
 $\vec{0} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + (1-c_1) \vec{a}_1 + \dots + (-1-c_1) \vec{a}_1$
 su LZ

$\Rightarrow$ Neka $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ su LZ, $\underline{\hspace{1cm}}$? $a_1, \dots, a_n \in F$
 $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0}$

- nekoji je $c_1, \dots, c_n$ je nula ili nije nula
 suv (ili zbog na vektorskoj) neka $c_1 \neq 0$
 $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0}$
 $c_1 \vec{a}_1 = -c_2 \vec{a}_2 - \dots - c_n \vec{a}_n \quad | : c_1 \rightarrow c_1 \neq 0$
 $\vec{a}_1 = (-c_2/c_1) \vec{a}_2 + \dots + (-c_n/c_1) \vec{a}_n$
 $\square$

Veta: Neka $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V, \vec{a}_i \neq \vec{0}, n \geq 2$.
 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ su LZ $\Leftrightarrow$ nekoji je LZ ili su nezavisni.

D: $\Leftarrow$ $\Rightarrow$ $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad (c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$
 Neka c_i je poslednji koeficijent
 $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_i \vec{a}_i = \vec{0}$
 $\vec{a}_i = (-c_1/c_i) \vec{a}_1 + \dots + (-c_{i-1}/c_i) \vec{a}_{i-1} \quad (i \neq 1 \text{ ako } \vec{a}_i \neq \vec{0})$

BAZA A DIMENZIA

Def.: Nech V je VP. V je **KONEČNORozMERNÁ**, ak existujú $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$,
 $\alpha \in \mathbb{I}[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = V$

Def.: Nech V je VP a $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$.

Vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ tvoria bázu VP V , ak:

- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sú LN
- $\mathbb{I}[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n] = V$

(P1) $V = \{\vec{0}\} = \mathbb{I}[\vec{0}]$... konečnorozmerný
 nemá bázu (x $n=0$ nechceme)

(P2) $V = F^n$ (VP nad F) $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ báza priestoru F^n
 $(\vec{a}_1) \vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) / e_1$ ↳ STANDARDNÁ BÁZA $V = F^n$
 $(\vec{a}_2) \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) / e_2$
 $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0) / e_3$
 $\vdots$
 $(\vec{a}_n) \vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1) / e_n$
 $c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + \dots + c_n \vec{e}_n = \vec{0}$
 $\downarrow$
 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ LN ✓
 $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in F^n$
 $c_1 = a_1, \dots, c_n = a_n$ generuje V
 $c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + \dots + c_n \vec{e}_n =$
 $= (c_1, c_2, \dots, c_n)$

VEŤA: Nech $V \neq \{\vec{0}\}$ je konečnorozmerný priestor a $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s$ sú LN.
 Potom existuje báza obsahujúca $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s$.

D: V je konečnorozmerný $\Rightarrow V = \mathbb{I}[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$
 Skinitzova veta: $V = \mathbb{I}[\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-s}] = V$
 ↳ dá sa pridať $(n-s)$ ďalších, že generujú...

Nech k je najmenší počet vektorov z $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, kt. sa dajú pridať tak, že spolu generujú V .

$V = \mathbb{I}[\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s, \vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}] \Rightarrow$ baza
 $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s, \vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_k}$ sú LN
 ↑ každýktor $k \geq 2 \Rightarrow$ vektory je k predchádzajúcemu
 ↳ je to vektor z $\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_k}$
 $V = \mathbb{I}[\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s, \vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_k}]$ (následne k-1)
 ↳ proces > minimalizácia k

DŮSLEDOK: $V \neq \{\vec{0}\}$, konečnorozmerný $\Rightarrow V$ má bázu

D: $V \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow$ ex $\vec{b}_1, \vec{0}, \vec{b}_2 \in V$
 $\vec{b}_1$ LN + pridajú predch. veku

LEMA: Nech V je konečný VP, $V \neq \{0\}$
 Existujú dve bázy priestoru V majú rovnaký počet prvkov

D: Nech

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ báza $V \Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ generujú V LN
 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_s$ báza $V \Rightarrow$ LN generujú V

$$s = n \quad \leftarrow \quad s \leq n \quad n \leq s$$

□

Def: $d(V)$... dimenzia VP V

Nech V je konečne-rozmerný priestor :

- $V \neq \{0\} \Rightarrow d(V) = \#$ prvkov (lineárnej) bázy
- $d(\vec{0}) = 0$

$$\begin{aligned} \textcircled{\mathbb{R}} \quad d(F^n) &= n \\ d(\mathbb{R}^2) &= 2 \\ d(\mathbb{R}^3) &= 3 \end{aligned}$$

TVR: Nech $d(V) = n$
 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_s$ sú LN $\Rightarrow s \leq n$

D: $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_s$ sú LN $\Rightarrow$ $s \leq n$
 $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] = V$
 báza

□

$$\begin{aligned} \textcircled{\mathbb{R}} \quad \left. \begin{aligned} \vec{p}_1 &= (1, 2, 3) \\ \vec{p}_2 &= (2, 1, \sqrt{2}) \\ \vec{p}_3 &= (1, \pi, e) \\ \vec{p}_4 &= (0, 1, 1) \end{aligned} \right\} \text{ sú LN v } \mathbb{R}^3 \\ d(\mathbb{R}^3) = 3 \end{aligned}$$

VEĽA:

Nech $d(v) = n$

Nech $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$

NSE (následujúce podmienky sú ekvivalentné)

(i) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ je báza

(ii) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú LN

(iii) $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = V$

D:



VIEM: ex. báza $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$; $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú LN; $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = V$

ii $\Rightarrow$ iii $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú LN

$[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = V$

Steinitz: K $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sa dá pridať $(n-n)=0$

tak, že $[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = V$

iii $\Rightarrow$ i

ONCEM: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú LN

SPOR: Nech by $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ boli LZ $\Rightarrow$ vektory je LZ obsahujúcich

? Dívaj $\vec{a}_n$ je LZ $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$

$$\left. \begin{aligned} V = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] &= [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}] \\ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n &\text{ sú LN} \end{aligned} \right\} \Rightarrow n \leq n-1 \quad \text{SPOR}$$

VEĽA:

Nech V je VP, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$

Vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ tvoria bázu $V \Leftrightarrow$ každý vektor $\vec{f} \in V$ sa dá jedinečne vyjadriť ako ich LZ

$$\vec{f} = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n$$

báza $\Rightarrow$ "súradnice" $\neq$ každému vektoru vieme priradiť súradnice (c_1, c_2)

D:

Každý vektor sa dá dostať ako LZ $\Leftrightarrow V = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$

$$\begin{aligned} \text{teda: } \vec{f} &= c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n \rightarrow (c_1, \dots, c_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] &= V \Rightarrow \text{dá sa vyjadriť} \\ c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n &= c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n \\ (c_1 - c_1) \vec{a}_1 + (c_2 - c_2) \vec{a}_2 + \dots + (c_n - c_n) \vec{a}_n &= \vec{0} \\ c_1 - c_1 = c_2 - c_2 = \dots = c_n - c_n &= 0 \\ c_1 = c_1, c_2 = c_2, \dots, c_n = c_n \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ generujúci
sú LN?

$$\begin{aligned} c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n &= \vec{0} \\ 0 \vec{a}_1 + \dots + 0 \vec{a}_n &= \vec{0} \\ \downarrow \text{jednosmernosť} \\ c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0 \end{aligned}$$

□

VEĽA: Nech U je VP, S je VPP.

Ak U je konvenor, tak g je konvenor.

$$d(S) \leq d(U)$$

D: Na D.č.

□

TVR: S je VPP na U (U je konvenor)

Ak $d(S) = d(U)$, tak $S = U$

D: ()

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \text{ báza } S \\ \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n \text{ báza } U \end{array} \right\} \Rightarrow \sum \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n] = U^{n-n=0}$$